

ΜΑΘΗΜΑ 26**2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ****Θεωρία – Μέθοδος****Ασκήσεις****ΘΕΩΡΙΑ****1.****Ορισμός.**

Έστω συνάρτηση $y = f(x)$ παραγωγίσιμη στο x_0 .

Ρυθμός μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 λέγεται η παράγωγος $f'(x_0)$ και

Ρυθμός μεταβολής του y ως προς x λέγεται η παράγωγος $f'(x)$.

2.**Ορισμός.**

Έστω $S = S(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει τη θέση κινητού σε άξονα ως προς το χρόνο t .

Στιγμιαία ταχύτητα $v(t_0)$ κατά τη χρονική στιγμή t_0 λέγεται ο ρυθμός μεταβολής $S'(t_0)$. Δηλαδή $v(t_0) = S'(t_0)$.

Γενικότερα, **ταχύτητα** είναι η παράγωγος του διαστήματος ως προς το χρόνο, δηλαδή $v(t) = S'(t)$

3.**Ορισμός.**

Έστω $v = v(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την ταχύτητα κινητού σε άξονα ως προς το χρόνο t .

Στιγμιαία επιτάχυνση $a(t_0)$ κατά τη χρονική στιγμή t_0 λέγεται ο ρυθμός μεταβολής $v'(t_0)$. Δηλαδή $a(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$.

Γενικότερα, **επιτάχυνση** είναι η παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο, ή η δεύτερη παράγωγος του διαστήματος ως προς το χρόνο.

Δηλαδή $a(t) = v'(t) = S''(t)$

4.**Ορισμός.**

Έστω $K = K(x)$ η συνάρτηση που εκφράζει το κόστος παραγωγής K συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος.

Οριακό κόστος στο x_0 λέγεται ο ρυθμός μεταβολής $K'(x_0)$

Γενικότερα, **οριακό κόστος** είναι η παράγωγος του κόστους.

5.

Ορισμός.

Έστω $E = E(x)$ η συνάρτηση που εκφράζει την είσπραξη E συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος .

Οριακή είσπραξη στο x_0 λέγεται ο ρυθμός μεταβολής $E'(x_0)$

Γενικότερα, **οριακή είσπραξη** είναι η παράγωγος της είσπραξης .

6.

Ορισμός.

Έστω $P = P(x)$ η συνάρτηση που εκφράζει το κέρδος P συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος .

Οριακό κέρδος στο x_0 λέγεται ο ρυθμός μεταβολής $P'(x_0)$

Γενικότερα, **οριακό κέρδος** είναι η παράγωγος του κέρδους .

ΜΕΘΟΔΟΣ

Σε κάθε πρόβλημα ρυθμού μεταβολής ακολουθούμε με ακρίβεια τις παρακάτω ενέργειες

- 1.. Διακρίνουμε το πρωτομεταβαλλόμενο στοιχείο , δηλαδή την ανεξάρτητη μεταβλητή που συνήθως είναι ο χρόνος t .
2. Εκφράζουμε με συνάρτηση το δευτερομεταβαλλόμενο στοιχείο του προβλήματος, το τρίτο . . . κ.λ.π
3. Περνάμε τις υποθέσεις και το ζητούμενο στις συναρτήσεις του (2)
4. Βρίσκουμε τις σχέσεις που συσχετίζουν τα μεταβαλλόμενα στοιχεία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Η ολική επιφάνεια ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό $2 \text{ cm}^2/\text{sec}$. Τη στιγμή κατά την οποία η ακμή του κύβου είναι $1,8 \text{ m}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του κύβου

Προτεινόμενη λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t .

Έστω t_0 η στιγμή κατά την οποία η ακμή του κύβου είναι 180 cm .

2. Έστω $\alpha = \alpha(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την ακμή.
 $E = E(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την επιφάνεια.
 $V = V(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει τον όγκο

3. Δίνεται $E'(t) = 2$ και $\alpha(t_0) = 1,8 \text{ m} = 180 \text{ cm}$

Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $V'(t_0)$

4. Είναι $E = 6\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{6}E \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}E^{\frac{1}{2}}$

$$V = \alpha^3 \Rightarrow V = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}E^{\frac{1}{2}}\right)^3 \Rightarrow V = \frac{1}{6\sqrt{6}}E^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Άρα } V(t) = \frac{1}{6\sqrt{6}}E^{\frac{3}{2}}(t) \Rightarrow V'(t) = \frac{1}{6\sqrt{6}}(E^{\frac{3}{2}}(t))'$$

$$V'(t) = \frac{1}{6\sqrt{6}} \cdot \frac{3}{2} E^{\frac{1}{2}}(t) E'(t)$$

$$V'(t_0) = \frac{1}{4\sqrt{6}} E^{\frac{1}{2}}(t_0) \cdot 2$$

$$\text{Αλλά } E(t_0) = 6\alpha^2(t_0) = 6 \cdot 180^2, \text{ οπότε } V'(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \sqrt{6} \cdot 180$$

$$V'(t_0) = 90 \text{ m}^3/\text{sec}$$

2.

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (Oxy) δίνεται το σημείο $B(0, 10)$.

Σημείο M κινείται στο θετικό ημιάξονα Ox με ταχύτητα 3 μονάδες μήκους/sec.

- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\widehat{OBM}$ ως προς το χρόνο t , τη στιγμή κατά την οποία το M έχει συντεταγμένες $(20, 0)$.
- Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου του τριγώνου OMB , ως προς το χρόνο t , όταν το M έχει συντεταγμένες $(10, 0)$;

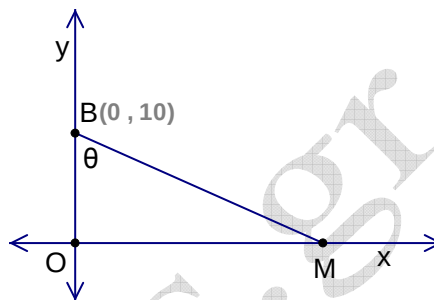
Προτεινόμενη λύση

i)

- Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t .

Έστω t_0 η στιγμή κατά την οποία το M έχει συντεταγμένες $(20, 0)$.

- $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τετμημένη του M
 $\theta = \theta(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει τη γωνία $\widehat{OBM}$



- Δίνεται $x'(t) = 3$ και $x(t_0) = 20$

Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $\theta'(t_0)$

- Είναι $\text{εφ } \theta = \frac{(OM)}{(OB)} = \frac{x}{10} \Rightarrow \text{εφ } \theta(t) = \frac{1}{10} x(t)$

$$(\text{εφ } \theta(t))' = \left(\frac{1}{10} x(t)\right)'$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \theta'(t) = \frac{1}{10} x'(t)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t_0)} \theta'(t_0) = \frac{1}{10} x'(t_0)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t_0)} \theta'(t_0) = \frac{1}{10} \cdot 3 \quad (1)$$

Όταν $x(t_0) = 20$ τότε $(BM) = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$

$$\text{άρα } \sin \theta(t_0) = \frac{(OB)}{(BM)} = \frac{10}{10\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(1) \Rightarrow 5 \theta'(t_0) = \frac{3}{10} \Rightarrow \theta'(t_0) = \frac{3}{50} \text{ rad/sec}$$

ii)

- Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t .

t_1 η στιγμή κατά την οποία το M έχει συντεταγμένες $(10, 0)$.

- $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τετμημένη του M
 $\omega = \omega(t)$ το μήκος της υποτείνουσας BM
 $\Pi = \Pi(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το την περιμέτρου του $\triangle OMB$

- Δίνεται $x'(t) = 3$ και $x(t_1) = 10$

Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $\Pi'(t_1)$

4. Είναι $(BM)^2 = (OB)^2 + (OM)^2 \Rightarrow$

$$[\omega(t)]^2 = 10^2 + [x(t)]^2$$

$$([\omega(t)]^2)' = (10^2 + [x(t)]^2)'$$

$$2 \omega(t) \omega'(t) = 2 x(t) x'(t)$$

$$\omega(t_1) \omega'(t_1) = x(t_1) x'(t_1)$$

$$\omega(t_1) \omega'(t_1) = 10 \cdot 3 \quad (2)$$

Όταν $x(t_1) = 10$ τότε $(BM) = 10\sqrt{2}$ δηλαδή $\omega(t_1) = 10\sqrt{2}$

$$(2) \Rightarrow 10\sqrt{2} \omega'(t_1) = 30 \Rightarrow \omega'(t_1) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Είναι $\Pi(t) = (OB) + x(t) + \omega(t) \Rightarrow \Pi'(t) = 0 + x'(t) + \omega'(t)$

$$\Pi'(t_1) = x'(t_1) + \omega'(t_1)$$

$$\Pi'(t_1) = 3 + \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ μονάδες μήκους/sec}$$

3.

Σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της υπερβολής $3x^2 - y^2 = 12$ έτσι, ώστε η τεταγμένη του να αυξάνεται με ρυθμό 6 μονάδες μήκους/sec. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M , όταν το M έχει τετμημένη 4.

Προτεινόμενη λύση

i)

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t .
 t_0 η στιγμή κατά την οποία το M έχει τετμημένη 4.
2. $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τετμημένη του M
 $y = y(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τεταγμένη του M
3. Δίνεται $y'(t) = 6$ και $x(t_0) = 4$
Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $x'(t_0)$
4. Είναι $3[x(t)]^2 - [y(t)]^2 = 12 \Rightarrow (3[x(t)]^2 - [y(t)]^2)' = 0$

$$3 \cdot 2 x(t) x'(t) - 2 y(t) y'(t) = 0$$

$$3 x(t) x'(t) = y(t) y'(t)$$

$$3 \cdot 4 \cdot x'(t_0) = y(t_0) \cdot 6$$

$$2 x'(t_0) = y(t_0) \quad (1)$$

Όταν $x(t_0) = 4$, από την $3[x(t_0)]^2 - [y(t_0)]^2 = 12$ παίρνουμε

$$3 \cdot 4^2 - [y(t_0)]^2 = 12$$

$$[y(t_0)]^2 = 36$$

$$y(t_0) = 6 \quad \text{ή} \quad y(t_0) = -6$$

$$(1) \Rightarrow 2 x'(t_0) = \pm 6 \Rightarrow x'(t_0) = \pm 3$$

4.

Δίνεται η παραβολή $y = x^2$. Σημείο $A(\alpha, \alpha^2)$ με $\alpha > 0$ κινείται πάνω στην παραβολή με ρυθμό μεταβολής του α 2 μονάδες μήκους/sec. Άλλο σημείο B κινείται πάνω στην παραβολή έτσι, ώστε $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AOB τη στιγμή κατά την οποία $\alpha = 3$ μονάδες μήκους.

Προτεινόμενη λύση

Κατ' αρχήν θα βρούμε τις συντεταγμένες του B και το εμβαδόν (AOB) συναρτήσει του α .

$$\lambda_{OA} = \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$$

$$OB \perp OA \Leftrightarrow \lambda_{OB} \lambda_{OA} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OB} = -\frac{1}{\alpha}$$

$$\text{Ευθεία OB: } y = -\frac{1}{\alpha} x$$

$$\begin{aligned} \text{Σύστημα } \begin{cases} y = x^2 \\ y = -\frac{1}{\alpha} x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\alpha} x = x^2 \\ y = -\frac{1}{\alpha} x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } -\frac{1}{\alpha} = x \\ y = -\frac{1}{\alpha} x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -\frac{1}{\alpha} = x \\ y = \frac{1}{\alpha^2} \end{cases} \quad \text{Άρα } B\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}\right) \end{aligned}$$

$$(OA) = \sqrt{\alpha^2 + (\alpha^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha \sqrt{1 + \alpha^2}$$

$$(OB) = \sqrt{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^4}} = \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\alpha^2 + 1}$$

$$(AOB) = \frac{1}{2} (OA)(OB) = \frac{1}{2} \alpha \sqrt{\alpha^2 + 1} \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\alpha^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

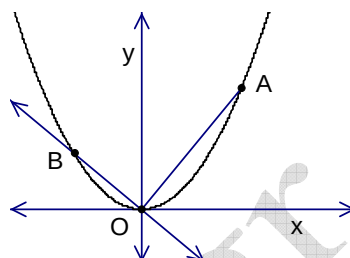
1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t .
 t_0 η στιγμή κατά την οποία $\alpha = 3$

2. $\alpha = \alpha(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τετμημένη του A
 $E = E(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν (AOB)

3. Δίνεται $\alpha'(t) = 2$ και $\alpha(t_0) = 3$

Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $E'(t_0)$

$$4. \text{ Είναι } E(t) = \frac{1}{2} \left(\alpha(t) + \frac{1}{\alpha(t)}\right) \Rightarrow E'(t) = \frac{1}{2} \left(\alpha(t) + \frac{1}{\alpha(t)}\right)'$$



$$E'(t) = \frac{1}{2} \left(\alpha'(t) - \frac{\alpha'(t)}{[\alpha(t)]^2} \right)$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} \left(\alpha'(t_0) - \frac{\alpha'(t_0)}{[\alpha(t_0)]^2} \right)$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2}{[3]^2} \right)$$

$$E'(t_0) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \text{ τετραγωνικές μονάδες μήκους /sec}$$

5.

Σημείο $A(x(t), y(t))$ κινείται πάνω στην παραβολή $f(x) = x^2$ όπου t ο χρόνος, έτσι ώστε να ισχύει $x'(t) = -x(t)$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο A τέμνει τον άξονα x σε σημείο B , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του B τη στιγμή κατά την οποία το A έχει συντεταγμένες $(2, 4)$.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $A(x_A, y_A) = A(x_A, x_A^2)$ το τυχαίο A .

Η εφαπτομένη στο A θα είναι

$$y - y_A = f'(x_A)(x - x_A)$$

και επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του B ,

$$\text{δηλαδή } 0 - y_A = f'(x_A)(x_B - x_A) \quad (1)$$

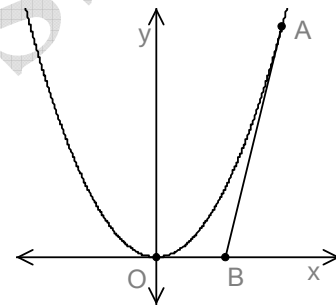
Αλλά $f'(x) = (x^2)' = 2x$, οπότε $f'(x_A) = 2x_A$

$$\text{Η } (1) \Rightarrow -x_A^2 = 2x_A(x_B - x_A)$$

$$-x_A = 2(x_B - x_A)$$

$$-x_A = 2x_B - 2x_A$$

$$x_B = \frac{x_A}{2}, \text{ οπότε } x_B(t) = \frac{x_A(t)}{2} = \frac{x(t)}{2} \quad (2)$$



1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t .

t_0 η στιγμή κατά την οποία το A έχει συντεταγμένες $(2, 4)$.

$$2. \quad x = x(t) = x_A$$

$$y = y(t) = y_A = x^2(t)$$

3. Δίνεται $x'(t) = -x(t)$

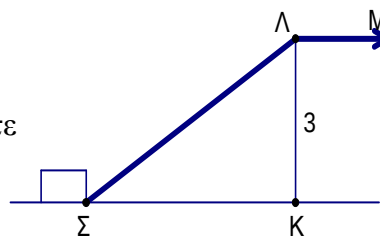
$$x(t_0) = 2, \quad y(t_0) = 4$$

$$4. \quad \text{Η } (2) \Rightarrow x'_B(t) = \frac{x'(t)}{2} = \frac{-x(t)}{2}$$

$$\text{Για } t = t_0 \text{ έχουμε } x'_B(t_0) = \frac{-x(t_0)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

6.

Σώμα Σ έλκεται με σχοινί $\Sigma\Lambda\text{M}$, με αποτέλεσμα να σύρεται επί του εδάφους πλησιάζοντας τη βάση K του στύλου $K\Lambda = 3\text{ m}$ (σχήμα). Αν η ταχύτητα της άκρης M του σχοινιού είναι 8 m/sec , να βρείτε την ταχύτητα του σώματος Σ τη στιγμή κατά την οποία είναι $\Sigma K = 4\text{ m}$.



Προτεινόμενη λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t .
 t_0 η στιγμή κατά την οποία $(\Sigma K) = 4$
2. $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το μήκος $(\Sigma\Lambda)$
 $y = y(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το μήκος (ΣK)
3. Δίνεται $x'(t) = 8$ και $y(t_0) = 4$
Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $y'(t_0)$
4. Είναι $(\Sigma\Lambda)^2 - (\Sigma K)^2 = 3^2 \Rightarrow [x(t)]^2 - [y(t)]^2 = 9$

$$([x(t)]^2 - [y(t)]^2)' = 0$$

$$2x(t)x'(t) - 2y(t)y'(t) = 0$$

$$x(t_0)x'(t_0) - y(t_0)y'(t_0) = 0$$

$$x(t_0)8 - 4y'(t_0) = 0$$

$$2x(t_0) - y'(t_0) = 0 \quad (1)$$

Αλλά $[y(t_0)]^2 + 3^2 = [x(t_0)]^2$
 $4^2 + 3^2 = [x(t_0)]^2$
 $25 = [x(t_0)]^2$
 $x(t_0) = 5$

$$(1) \Rightarrow 2 \cdot 5 - y'(t_0) = 0 \Rightarrow y'(t_0) = 10\text{ m/sec}$$

7.

Η τροχιά κινητού M είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$.
 Όταν το M έχει τετμημένη 1, να αποδείξετε ότι, ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του M από την αρχή των αξόνων O , είναι μηδέν.

Προτεινόμενη λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t .
 t_0 η στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του M είναι 1.
 2. $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τετμημένη του M
 $y = y(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τεταγμένη του M
 $d = d(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση του M από την αρχή των αξόνων O
 3. Δίνεται $x(t_0) = 1$ άρα και $y(t_0) = \frac{1}{x(t_0)} = \frac{1}{1} = 1$
 Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $d'(t_0) = 0$
 4. Είναι $y(t) = \frac{1}{x(t)} \Rightarrow y'(t) = \left(\frac{1}{x(t)}\right)'$

$$y'(t) = -\frac{1}{[x(t)]^2} x'(t)$$

$$y'(t_0) = -\frac{1}{[x(t_0)]^2} x'(t_0)$$

$$y'(t_0) = -\frac{1}{1^2} x'(t_0) \Rightarrow y'(t_0) = -x'(t_0) \quad (1)$$
- Είναι $[d(t)]^2 = [x(t)]^2 + y(t)]^2 \Rightarrow$

$$([d(t)]^2)' = ([x(t)]^2 + y(t)]^2)'$$

$$2 d(t) d'(t) = 2 x(t) x'(t) + 2 y(t) y'(t)$$

$$d(t_0) d'(t_0) = x(t_0) x'(t_0) + y(t_0) y'(t_0) \quad \text{αλλά} \quad d(t_0) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} d'(t_0) = 1 \cdot x'(t_0) + 1 \cdot y'(t_0) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \sqrt{2} d'(t_0) = x'(t_0) - x'(t_0) = 0$$

$$\text{άρα } d'(t_0) = 0$$

8.

Έστω η παραβολή $f(x) = x^2 - \beta x + 1$, όπου β μεταβαλλόμενο μέγεθος που αυξάνει με ρυθμό 3 μονάδες/sec. Κάποια στιγμή t_0 η κορυφή M της παραβολής έχει τεταγμένη μηδέν. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του M από την αρχή των αξόνων O κατά τη στιγμή t_0 .

Προτεινόμενη λύση

Τετμημένη του M : $x_M = -\frac{-\beta}{2 \cdot 1} = \frac{\beta}{2}$ **(1)**

Τεταγμένη του M : $y_M = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{(-\beta)^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{\beta^2 - 4}{4} = \frac{4 - \beta^2}{4}$ **(2)**

Απόσταση d του M από το O : $d = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{4 - \beta^2}{4}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{16 - 8\beta^2 + \beta^4}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{4\beta^2 + 16 - 8\beta^2 + \beta^4}{16}}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\beta^4 - 4\beta^2 + 16}$$
 (3)

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t .
2. $\beta = \beta(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το μεταβαλλόμενο μέγεθος β .
 $x_M = x_M(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τετμημένη του M .
 $y_M = y_M(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τεταγμένη του M .
 $d = d(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση OM .

3. Δίνεται $\beta'(t) = 3$ και $y_M(t_0) = 0$
Θέλουμε να βρούμε τη $d'(t_0)$

$$4. (3) \Rightarrow d(t) = \frac{1}{4} \sqrt{\beta^4(t) - 4\beta^2(t) + 16} \Rightarrow$$

$$d'(t) = \frac{1}{4} \frac{1}{2\sqrt{\beta^4(t) - 4\beta^2(t) + 16}} [\beta^4(t) - 4\beta^2(t) + 16]'$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{2\sqrt{\beta^4(t) - 4\beta^2(t) + 16}} [4\beta^3(t)\beta'(t) - 8\beta(t)\beta'(t)]$$

Άρα $d'(t_0) = \frac{1}{4} \frac{1}{2\sqrt{\beta^4(t_0) - 4\beta^2(t_0) + 16}} [4\beta^3(t_0)\beta'(t_0) - 8\beta(t_0)\beta'(t_0)]$

(4)

$$(2) \Rightarrow y_M(t_0) = \frac{4 - \beta^2(t_0)}{4} \Rightarrow 0 = \frac{4 - \beta^2(t_0)}{4} \Rightarrow \beta(t_0) = 2 \text{ ή } -2$$

• Για $\beta(t_0) = 2$, η (4) $\Rightarrow d'(t_0) = \frac{1}{4} \frac{1}{2\sqrt{2^4 - 4 \cdot 2^2 + 16}} [4 \cdot 2^3 \cdot 3 - 8 \cdot 2 \cdot 3]$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{2\sqrt{16-16+16}} (96-48)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot 48 = \frac{48}{32} = \frac{3}{2}$$

• Για $\beta(t_0) = -2$, η (4) $\Rightarrow d'(t_0) = \dots\dots\dots = -\frac{3}{2}$

9.

Οι δύο παράλληλες πλευρές ορθογωνίου αυξάνονται με ρυθμό 2 cm/sec, ενώ οι δύο άλλες μειώνονται έτσι, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να είναι σταθερό 50 cm².
Να βρείτε :

- i) Το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου όταν το μήκος της αυξανόμενης πλευράς είναι 5 cm.
- ii) Τις διαστάσεις του ορθογωνίου τη στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου είναι μηδέν.

Προτεινόμενη λύση

i)

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t .
 t_0 η στιγμή κατά την οποία το μήκος της αυξανόμενης πλευράς είναι 5
2. $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το μήκος της αυξανόμενης πλευράς
 $y = y(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το μήκος της μειούμενης πλευράς
 $\Pi = \Pi(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το μήκος της περιμέτρου
3. Δίνεται $x'(t) = 2$ και $x(t_0) = 5$
Θέλουμε να βρούμε τον $\Pi'(t_0)$
4. Είναι $x(t) y(t) = 50 \Rightarrow (x(t) y(t))' = 0$

$$x'(t) y(t) + x(t) y'(t) = 0$$

$$x'(t_0) y(t_0) + x(t_0) y'(t_0) = 0$$

$$2 y(t_0) + 5 y'(t_0) = 0 \quad (1)$$

Κατά τη στιγμή t_0 , το εμβαδόν παραμένει 50, άρα $x(t_0) \cdot y(t_0) = 50 \Rightarrow$

$$5 y(t_0) = 50 \Rightarrow y(t_0) = 10$$

$$(1) \Rightarrow 2 \cdot 10 + 5 y'(t_0) = 0 \Rightarrow y'(t_0) = -4$$

$$\text{Είναι } \Pi(t) = 2 x(t) + 2 y(t) \Rightarrow \Pi'(t) = 2 x'(t) + 2 y'(t)$$

$$\Pi'(t_0) = 2 x'(t_0) + 2 y'(t_0)$$

$$\Pi'(t_0) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) = 4 - 8 = -4$$

ii)

Έστω t_1 η στιγμή που συμβαίνει $\Pi'(t_1) = 0$.

$$\text{Είναι } \Pi(t) = 2x(t) + 2y(t) \Rightarrow \Pi'(t) = 2x'(t) + 2y'(t)$$

$$\Pi'(t_1) = 2x'(t_1) + 2y'(t_1)$$

$$0 = 2 \cdot 2 + 2y'(t_1)$$

$$y'(t_1) = -2$$

$$\text{Είναι } x(t)y(t) = 50 \Rightarrow (x(t)y(t))' = 0$$

$$x'(t)y(t) + x(t)y'(t) = 0$$

$$x'(t_1)y(t_1) + x(t_1)y'(t_1) = 0$$

$$2 \cdot y(t_1) + x(t_1)(-2) = 0$$

$$y(t_1) - x(t_1) = 0$$

$$y(t_1) = x(t_1)$$

$$\text{αλλά } x(t_1)y(t_1) = 50 \quad \text{άρα } x(t_1)x(t_1) = 50$$

$$[x(t_1)]^2 = 50$$

$$x(t_1) = \sqrt{50} \quad \text{άρα και } y(t_1) = \sqrt{50}$$

10.

Σε ένα κύκλο με ακτίνα $R = 1\text{m}$ θεωρούμε σταθερό σημείο A και δύο μεταβλητά σημεία B, Γ ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να παραμένει ισοσκελές με βάση $B\Gamma$. Αν τα B, Γ απομακρύνονται από το A με σταθερή ταχύτητα 2m/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$, τη στιγμή κατά την οποία το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Προτεινόμενη λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t .
 t_0 η στιγμή κατά την οποία το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.
2. $\beta = \beta(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το μήκος της πλευράς AB
 $E = E(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν ($AB\Gamma$)
3. Δίνεται $\beta'(t) = 2$ και $\beta(t_0) = \lambda_3 = R\sqrt{3} = \sqrt{3}$
Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $E'(t_0)$

4. Στο τρίγωνο γνωρίζουμε ότι $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} = \frac{\alpha\beta\beta}{4 \cdot 1} = \frac{\alpha\beta^2}{4}$ **(1)**

Θα εκφράσουμε την πλευρά α συναρτήσει του β .

Φέρνουμε το ύψος $AO\Delta$ και την $OZ \perp AB$

Πυθαγόρειο στο τρ. ZOA : $OZ^2 = OA^2 - AZ^2$

$$= 1^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{\beta^2}{4}$$

$$= \frac{4 - \beta^2}{4}$$

$$\text{Άρα } OZ = \frac{1}{2} \sqrt{4 - \beta^2}$$

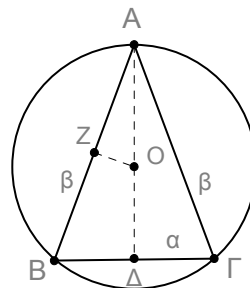
$$\text{Τρ. } AZO \text{ όμοιο του } A\Delta B \Rightarrow \frac{B\Delta}{ZO} = \frac{AB}{AO}$$

$$\frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4 - \beta^2}} = \frac{\beta}{1} \quad \text{άρα } \alpha = \beta\sqrt{4 - \beta^2}$$

$$\text{Η (1)} \Rightarrow E = \frac{\beta\sqrt{4 - \beta^2}\beta^2}{4} = \frac{1}{4} \beta^3\sqrt{4 - \beta^2}$$

$$\text{Άρα } E(t) = \frac{1}{4} \beta^3(t)\sqrt{4 - \beta^2(t)}$$

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{4} \left[(\beta^3(t))' \sqrt{4 - \beta^2(t)} + \beta^3(t) (\sqrt{4 - \beta^2(t)})' \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[3\beta^2(t)\beta'(t) \sqrt{4 - \beta^2(t)} + \beta^3(t) \frac{1}{2\sqrt{4 - \beta^2(t)}} (4 - \beta^2(t))' \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[3\beta^2(t)\beta'(t) \sqrt{4 - \beta^2(t)} + \beta^3(t) \frac{1}{2\sqrt{4 - \beta^2(t)}} (-2\beta(t)\beta'(t)) \right] \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{4} \left[3\beta^2(t)\beta'(t) \sqrt{4-\beta^2(t)} - \beta^4(t)\beta'(t) \frac{1}{\sqrt{4-\beta^2(t)}} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } E'(t_0) &= \frac{1}{4} \left[3\beta^2(t_0)\beta'(t_0) \sqrt{4-\beta^2(t_0)} - \beta^4(t_0)\beta'(t_0) \frac{1}{\sqrt{4-\beta^2(t_0)}} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[3\sqrt{3}^2 2 \sqrt{4-\sqrt{3}^2} - \sqrt{3}^4 2 \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{3}^2}} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[18 \cdot 1 - 18 \cdot \frac{1}{1} \right] = 0 \end{aligned}$$

netsuccess.gr